UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA P.A. 2023-3
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
DACIBAHCC

EXAMEN PARCIAL
DE METODOS NUMERICOS (MB536)

APELLIDOS Y NOMBRES	CODIGO	FIRMA	SECCION

NOTA DEL EXAMEN			
	NÚMEROS	**LETRAS**	**Firma del docente**

INDICACIONES:

- Se permite el uso de dos hojas de formulario.
- Está permitido el uso de cualquier tipo de calculadoras, sin acceso a internet.
- No se permite el uso de celulares, laptop o dispositivos que usan internet.
- Resolver cada pregunta solo en el espacio asignado para tal fin.
- La claridad y buena presentación serán consideradas en la calificación.
- Duración del examen: **1 h 50 *min***

Lima, 05 de enero del 2024

Profesor del Curso:

Ing. Robert Castro Salguero

SOLUCIONARIO EXAMEN PARCIAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS PA 2023_2

PARTE I
Responda a las siguientes preguntas:

1. **(1 P)** Sea el siguiente sistema lineal de ecuaciones: $\begin{bmatrix} 2 & m \\ 4 & m-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

   Para que valores de ***m*** el sistema es absurdo.

   Solución

   F2=F2-2*F1

$$\begin{bmatrix} 2 & m \\ 0 & -m-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   m=-2, rango(A)=rango(Ab) =1; solución indeterminada

   $m \neq$-2, rango(A)=rango(Ab) =2; solución única

   No existe valores de m para que el sistema sea absurdo

2. **(1P)** Sea el sistema de punto flotante basado en el estándar IEEE-754, con la siguiente estructura:

S	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	M_1	M_2	M_3	M_4

   Determine el mayor y menor número normalizado negativo, en binario y en decimal.

   Solución

K=5
Bias=2^{K-1}-1=15
MenorNN: $(-1)^{(1)}(1.1111)*2^{11110-15}$ =$-(1+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-4})*2^{15}$=-63488 1 11110 1111
MayorNN: $(-1)^{(1)}(1.0000)*2^{00001-15}$ =-2^{-14}=-6.1035e-05
1 00001 0000

3. **(1P))** Verifique si converge para el método de Jacobi el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \\ -7 & 1 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 17 \\ 5 \end{bmatrix}$, Fundamente su respuesta.

Solución
Se verifica que:
4>(2+1)
5>(1+3)
9>(7+1)
Por lo tanto, la matriz tiene diagonal estrictamente dominante, por lo tanto, converge para Jacobi.

4. **(1P)** Sea la factorización de Doolite:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 20 & 22 & 2 \\ 0 & 28 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & e & 0 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & c & 0 \\ 0 & 7 & d \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine ***a*+*b*+*c*+*d*+*e***

Solución

$$\boldsymbol{a = 5, b = 4;\ c = 3, d = 2, e = 1}$$

a+b+c+d+e=15

5. **(1P)** Dada la siguiente matriz de un sistema dinámico:

$$A = \begin{bmatrix} 31 & 41 & -22 \\ 41 & 13 & 5 \\ -22 & 5 & 46 \end{bmatrix}$$

Halle el mayor autovalor absoluto, utilizando algún método numérico enseñado en clase, utilice como vector propio de partida $\begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \\ -0.7 \end{bmatrix}$ y realice 2 iteraciones y estime el error, fundamentando la fórmula usada.

Solución

iteración 1

Y=A*X=[71.0000   45.3000 -51.2000]'

l =   71

x =Y/l=[1.0000   0.6380   -0.7211]'

iteración 2

y =A*X=[73.0239   45.6887 -51.9817]'

l =   73.0239

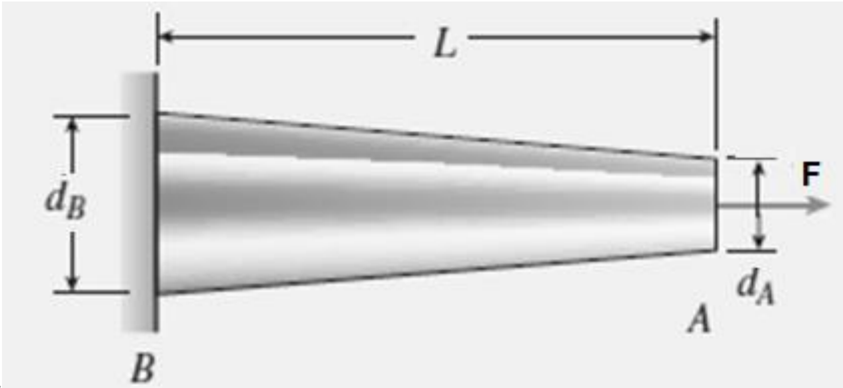
x =Y/l **= [** 1.0000   0.6257   -0.7118]'

Error=(73.0239-71)/73.0239=2.77%

PARTE II

Problema 1

Una pieza de metal de forma de cono truncado está empotrada en el extremo B. Siendo los diámetros d_A=0.2±0.001 m, d_B= 0.5±0.002 m, la longitud L=2.45±3% m, el módulo de elasticidad E =10^9 ±2% Pascales y sometida a una carga axial F comprendida entre 3996 y 4007 Newtons. Considere como π=3.142, con sus 3 cifras decimales exactas.



Su deformación longitudinal se puede calcular con la siguiente formula:

$$\boldsymbol{\delta = \frac{4FL}{\pi E d_A d_B}}$$

Aplicando propagación de errores, se pide:

a) **(2.5 P)** El error absoluto y relativo de la deformación longitudinal
b) **(1 P)** Estime el valor de la deformación longitudinal y su rango de variación.
c) **(1.5 P)** Muestre la representación en sinple precisión de 32 bits de la deformación longitudinal expresado en micras, redondeando a 3 cifras significativas del valor aproximado obtenido en b)

Solución

a)

Valores aproximados:

```
F = 4001.5
L = 2.4500
E = 1.0000e+09
dA = 0.2000
dB = 0.5000
p = 3.1420
δ = 1.2481e-04
```

Errores

```
ξF = 5.5000
ξdA = 1.0000e-03
ξdB = 0.0020
ξL = 0.0735
ξE = 20000000
ξp = 5.0000e-04
```

Derivadas parciales

```
dδ/dF = 3.1190e-08
dδ/dL = 5.0942e-05
dδ/dE = -1.2481e-13
dδ/ddA = -6.2404e-04
dδ/dB = -2.4962e-04
dδ/dp = -3.9722e-05
```

Error de la función

```
ξδ = 7.5551e-06
ξδ/δ = 6.0534%
b)

rango de la deformación:
    0.0001173     0.0001324

δ = 1.2481e-04 m = 125 µm
```

c)

```
125=1111101=1.111101*2^6

Ei-127=6    Ei=133=10000101

01000010111110100000000000000000
```

Problema 2

Sea la viga de longitud L= 1m., doblemente apoyada en los extremos con una carga distribuida w=1000 N/m, donde la curva elástica y(x) se puede obtener resolviendo la siguiente ecuación diferencial: y''=M(x) / EI, con condiciones de frontera: y(0)=0 e y(L)=0.

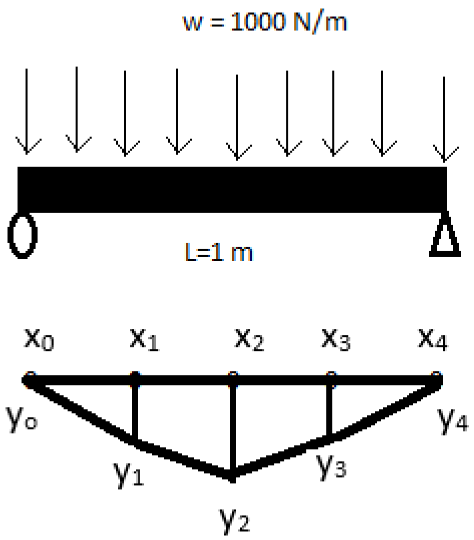
Para lo cual se puede aplicar el método de diferencias finitas, que consiste en aproximar la derivada $y''_i=(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})/h^2$. Discretizamos la viga en 4 segmentos de longitud h=0.25 m, $x_0=0$, $x_{i+1}=x_i+h$.

Si $EI=10^3$ N-m^2 y el momento flector es $M(x)=wLx/2-wx^2/2$

a) **(1.0 P)** Plantear el sistema de ecuaciones lineales:

$$y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}=h^2\frac{M(x_i)}{EI}$$

para i=1, 2 y 3.



b) **(1.0 P)** Analice la convergencia del sistema planteado para el método de Gauss-Seidel
c) **(2.0 P)** Resolver el sistema planteado mediante Gauss-Seidel, hasta tener una precisión de 0.001, partiendo de un vector inicial nulo.
d) **(1.0 P)** Estime la máxima deflexión y determine su error relativo porcentual si el valor real es -0.01302083

Solución

a)

$$y_2-2y_1+y_0=h^2\frac{M(x_1)}{EI}$$

$$y_3-2y_2+y_1=h^2\frac{M(x_2)}{EI}$$

$$y_4 - 2y_3 + y_2 = h^2 \frac{M(x_3)}{EI}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{0.25^2}{10^3} \begin{bmatrix} 93.75 \\ 125 \\ 93.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0059 \\ 0.0078 \\ 0.0059 \end{bmatrix}$$

b)

No tiene diagonal estrictamente dominante, por lo tanto, no se puede afirmar nada, aplicaremos el criterio del radio espectral:

$$Tg = inv(D - L) * U = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/8 & 1/4 \end{bmatrix}$$

rhoGS=0.5

Por lo tanto: Converge para Gauss-Seidel.

c)

```
Tg =      0    0.5000         0
          0    0.2500    0.5000
          0    0.1250    0.2500

Cg = -0.0029
     -0.0054
     -0.0056

X⁰ = 3×1
     0
     0
     0
X¹ =
   -0.0029
   -0.0054
   -0.0056

Err¹ = 0.0056

X² =
   -0.0056
   -0.0095
   -0.0077

Err² = 0.0042

X³ =
   -0.0077
   -0.0116
   -0.0087

Err³ = 0.0021

X⁴ =
   -0.0087
   -0.0126
   -0.0092

Err⁴ = 0.0010
```

```
X⁵ =
   -0.0092
   -0.0132
   -0.0095

Err⁵ = 5.1880e-04<0.001
```

d)

ymax_real=-0.01302083

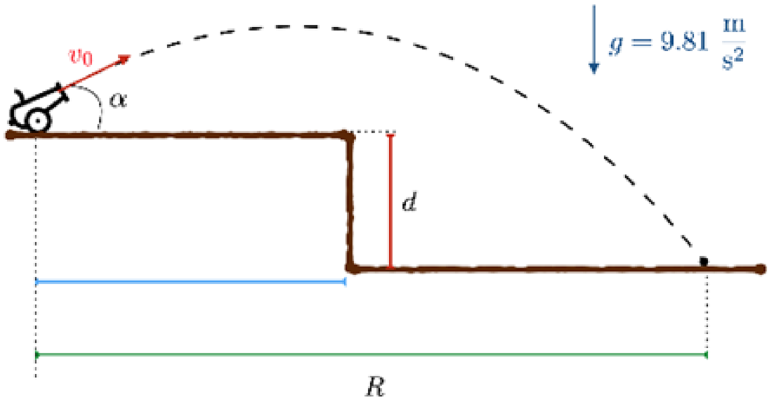
ymax_aprox=-0.01315307 (el punto medio de la 5ta iteración)

Err=0.0001322

Error_relativo= 1 %

Problema 3

En un experimento militar se ha lanzado un proyectil descrito por una trayectoria parabólica representada en la figura:



La siguiente función

$$R(\alpha) = \frac{v_0 \cos(\alpha)\left(v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{\sin^2(\alpha) v_0^2 + 2gd}\right)}{g},$$

permite obtener el alcance R del proyectil. El alto mando de la fuerza militar desea determinar el ángulo de lanzamiento α (rad) que permita obtener un alcance de R=160 m.

Considere las condiciones iniciales: $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$; $\mathrm{d} = 100$ m.; $\mathrm{v}_0 = 30 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

a) **(1P)** Localice la raíz o raíces de la ecuación con intervalos de longitud 0.1. Seleccione el(los) intervalos que asegure la existencia de al menos una raíz según el **Teorema de Bolzano**.
   i. [0.1;0.2]
   ii. [0.2;0.3]
   iii. [0.3;0.4]

b) **(2P)** A partir del intervalo inicial obtenido en (a) aplique el método de la bisección para aproximar la raíz realizando 02 iteraciones paso a paso e indique el error en cada iteración.

c) **(2P)** Realice 02 iteraciones de Newton-Raphson paso a paso y estime el error, tomando como valor inicial la aproximación obtenida en b)

Solución

a)

Bolzano

$$f(a) = 160 - \frac{1000\cos(a)\left(30\sin(a) + \sqrt{900\sin(a)^2 + 1962}\right)}{327}$$

$$\boldsymbol{f(0.1) = 15.7986}$$

$$\boldsymbol{f(0.2) = 8.1834}$$

$$\boldsymbol{f(0.3) = 2.1253}$$

$$\boldsymbol{f(0.4) = -1.9370}$$

Como la función es continua, entonces en el intervalo [0.3,0.4] existe por lo menos una raíz:

b)

Bisección

```
% it    xi      xr      xs      err     f(xi)   f(xr)   f(xs)
% 0     0.3     0.35    0.4     0.05      +       -       -
% 1     0.3     0.325   0.35    0.025     +       +       -
% 2     0.325   0.3375  0.35    0.0125    +       +       -
```

c)

Newton-Raphson

$$f'(a) = \frac{1000\sin(a)\left(30\sin(a) + \sqrt{900\sin(a)^2 + 1962}\right)}{327} - \frac{1000\cos(a)\left(30\cos(a) + \frac{900\cos(a)\sin(a)}{\sqrt{900\sin(a)^2 + 1962}}\right)}{327}$$

$$\boldsymbol{aN = a - f(a)/f'(a)}$$

```
% i   ai                  err
% 0   0.337500000000000
% 1   0.345419321393885   0.007919321393885
% 2   0.345582154388775   1.628329948898388e-04
```